ALLISAMENT DE CORBES DE L'ESPAI PROJECTIU*

per

CARME ANNA SÀNCHEZ I ROYO

Departament d'Àlgebra i Geometria.
Facultat de Matemàtiques. Universitat de Barcelona

SUMMARY

We are interested on the problem of smoothing projective space curves. We say that a curve X in P^3 is smoothable if there exists a family of curves X_t in P^3 whose general member X_t is smooth and whose special member X_o is X. (This notion of smoothability depends on the kind of families considered; here we shall deal mainly with flat families).

The organization of this paper is as follows: first we summarize the works of TANNENBAUM, BALLICO and ELLIA, SAUER and other authors about this subject ([T1], [T2], [T3], [B-E], [Sa], [H3]) and explain the theory recently developped by Hartshorne and Hirschowitz ([H-H]). Next we apply the latter to study the smoothability of reduced curves in P^3 which are the nodal union of a plane curve and a curve on a non degenerate quadric, both curves being non singular. Finally, we study the smoothability of connected reduced curves in P^3 with arithmetic genus 1.

INTRODUCCIÓ

Dins l'estudi de corbes de l'espai projectiu, ens podem plantejar la qüestió següent: donada una corba singular C de P^3, és límit d'una família de corbes projectives no singulars?, és a dir, existeix una família X parametritzada per un esquema T

* Aquest treball és un resum de la Memòria presentada per tal d'optar al grau de llicenciatura de Matemàtiques, dirigida pel Dr. Sebastià Xambó. Va obtenir el Premi per a Estudiants de la Societat Catalana de Ciències, en la seva Secció de Matemàtiques, de la convocatòria del 23 d'abril de 1986.

$$\begin{array}{ccc} & X \subset T \times P^3 \\ f & \downarrow & \\ & T & \end{array}$$

tal que el membre general X_t sigui una corba llisa i el membre especial X_0 sigui C? Quan la resposta sigui afirmativa, direm que C és *allisable*.

Com podeu observar, la qüestió, plantejada així, és molt ambígua, perquè segons el tipus de famílies considerades, hom obtindrà uns resultats o uns altres. En primer lloc cal, doncs, fixar el tipus d'especialització considerat. Si volem que el gènere aritmètic i el grau siguin constants per a totes les corbes de la família, és clar ([H] Ch III, 9.13) que haurem de considerar famílies planes, és a dir, tals que f sigui pla. Aleshores parlarem de corbes planament allisables (o allisables si no pot haver-hi confusió). Aquest tipus d'allisament té interès perquè està relacionat amb l'estudi de l'esquema de Hilbert. Donat un polinomi $p(t) = dt + 1 - g$, l'esquema de Hilbert de P^3 relatiu a aquest polinomi és un esquema algèbric que parametritza una família plana de corbes de P^3 de grau d i gènere g. Aleshores, és clar que dir que C és allisable és equivalent a dir que el punt de l'esquema de Hilbert corresponent a C és a l'adherència de l'obert format per corbes llises.

Un altre tipus d'allisament que podem considerar és el següent: una corba C és allisable si el punt corresponent de l'esquema de Chow pertany a una component irreductible el membre general de la qual és una corba llisa. Notem que en aquest cas totes les corbes de la família tenen el mateix grau, però no necessàriament el mateix gènere aritmètic. Tannenbaum dóna a [T2] exemples de corbes reductibles no planament allisables i que en canvi pertanyen a una única component de l'esquema de Chow de membre genèric una corba reductible llisa. Són corbes del tipus $C \cup L$ on C és una corba plana de grau $d \geqq 4$ i L una recta que la talla en un únic punt. Aquestes corbes no són planament allisables perquè no existeixen corbes llises del mateix grau i gènere aritmètic que $C \cup L$, però pertanyen a una única component de l'esquema de Chow, la component de membre genèric una corba plana de grau d i una recta disjunta.

Altres tipus de deformacions que podem considerar són les determinantals, és a dir, deformacions del con projectant. Peskine i Szpiro a [P-S] proven que la cúbica plana amb una recta que la talli en un punt i no continguda en el pla de la cúbica, no pot ésser allisada en aquest sentit, mentre que Tannenbaum a [T3], i després Hartshorne i Hirschowitz a [H-H], demostren que admet deformacions planes dins P^3.

Finalment, diguem també que hom pot tractar el problema d'allisament de corbes abstractes (Mumford [M1]) i d'allisament de cicles algèbrics (Hartshorne [H5], Kleiman [K]).

L'objectiu d'aquest treball és presentar allò que ha estat fet fins ara relatiu al tema d'allisament, especialment l'allisament pla, i els diferents mètodes coneguts per a determinar si una corba és o no allisable. Se centra sobretot en la teoria desenvolupada per HARTSHORNE i HIRSCHOWITZ i aplicacions seves; la importància d'aquesta teoria està que és la primera que arriba a establir teoremes aplicables no tan sols a exemples concrets sinó a tot un conjunt més ampli de corbes, corbes reduïdes formades per la unió nodal de corbes no singulars. En particular, permet de retrobar els resultats de Tannenbaum i de Ballico i Ellia. Com a aplicació d'aquesta teoria, hom ha estudiat l'allisament de corbes reduïdes formades per la unió nodal de dues corbes no singulars, l'una plana i l'altra sobre una quàdrica no degenerada (secció 3, §1), així com l'allisament de corbes reduïdes i connexes de gènere aritmètic 1 (secció 3, §2).

1. RESULTATS ANTERIORS A LA TEORIA DESENVOLUPADA PER HARTSHORNE I HIRSCHOWITZ.

Anteriors a la teoria desenvolupada per HARTSHORNE I HIRSCHOWITZ ([H-H]) sobre l'allisament o no allisament de certs tipus de corbes, cal destacar els resultats obtinguts d'una banda per A. TANNENBAUM i de l'altra per E. BALLICO i Ph. ELLIA.

Tannenbaum, a [T1], prova que si X és una corba reduïda i connexa de P^3 amb gènere aritmètic 0, X pot ésser allisada planament a una corba irreductible. Tot primer, donades dues corbes X_1 i X_2 de P^3 amb $p_a(X_i) = 0$ i $\deg(X_i) = d_i$ $(i = 1,2)$ amb intersecció un únic punt amb tangents diferents, construeix una deformació plana dins P^3 de $X_1 \cup X_2$ a una corba llisa racional irreductible de grau $d_1 + d_2$. La deformació es fa sobre l'esquema de paràmetres $T = \operatorname{Spec} R$ on R és un anell de valoració discreta: siguin Γ_o i Γ_1 les fibres de $P^1 \times T \to T$ sobre el punt tancat i el punt genèric de T, sigui D un divisor sobre $P^1 \times T$ que talli a cada Γ_i en dos punts y_{ij} $(j = 1,2)$ amb multiplicitat d_j $(j = 1,2)$ i sigui S l'esclatament de $P^1 \times T$ en el punt $y_{01} \varepsilon \Gamma_o$. S és fibrada sobre T amb fibra genèrica $\overline{\Gamma}_1$ isomorfa a Γ_1, és a dir, a una recta projectiva, i fibra especial $\overline{\Gamma}_o$ isomorfa a dues rectes projectives que es tallen en un punt. Si $\tilde{D}$ denota la transformada pròpia de D a S, veu que $\tilde{D}$ és molt ample sobre S i que ens dóna una immersió de S dins $P_R^{d_1+d_2}$. Finalment, donat que la fibra tancada de $S \to P_R^{d_1+d_2}$ sobre Spec R pot ésser submergida dins P^3 per projecció genèrica, demostra que la deformació es pot fer efectiva dins P^3. A partir d'això i de la fórmula del gènere aritmètic donada per Hironaka ([Hi] Th2), conclou el resultat enunciat.

Amb un mètode idèntic a l'anterior, prova a [T3] que si $X = X_1 \cup X_2 \subset P^3$ és una corba amb components irreductibles X_1 i X_2, X_i llisa $(i = 1,2)$, $p_a(X_1) = 0$, $p_a(X_2) = g$, $\deg(X_i) = d_i$ i tal que X_1 i X_2 es tallen en un únic punt amb tangents diferents en aquest punt i X_2 està submergida a P^3 per un divisor no especial molt ample de grau d_2, aleshores X es pot allisar dins P^3 a una corba llisa irreductible de gènere g i grau $d_1 + d_2$.

Prova també, [T2], que tota corba $X \subset P^3$ formada per una corba plana llisa de grau $d \geqq 4$ i una recta que la talli en un únic punt, no pot ésser planament deformada a una corba llisa. Aquest resultat és conseqüència del fet que no existeixen corbes llises a P^3 de grau $d + 1$ i gènere $\frac{1}{2}(d-1)(d-2)$ per $d \geqq 4$.

Posteriors als treballs de Tannenbaum són els de Ballico i Ellia. Aquests autors, a [B-E], consideren una corba llisa $C \subset P^n$ de grau d i una recta L que talla a C quasi-transversalment en un únic punt, i demostren que si $O_C(1)$ és no especial, es a dir, $H^1(O_C(1)) = 0$, aleshores $C \cup L$ està en la clausura del subconjunt de l'esquema de Hilbert de P^n format per les corbes llises de grau $d + 1$ i gènere g, i per tant és allisable. Notem que per a $n = 3$ aquest resultat és un cas particular del de Tannenbaum [T3], però el mètode que usen per a demostrar-lo és completament diferent. Es basa en el següent:

Sigui $C \subset P^{n+1}$ $(n \geqq 3)$ una corba llisa no degenerada de grau d i gènere g, $x \in C$ i H un hiperplà que no conté x. Denotem per $\pi_x : P^{n+1} \to H$ la projecció des de x i posem $Y = \pi_x(C)$ i $y = T_xC \cap H$. Considerem una recta L continguda a H i que talli Y només en el punt y i quasi-transversalment. Sigui D una recta que talli a C només en el punt x i no tangent a C i que talli L en un punt diferent de y (fig. 1). En projectar sobre H des dels diferents punts de $D - \{x\}$ obtenim una família plana de corbes llises $X \subseteq H \times (D - \{x\})$ parametritzada per $D - \{x\}$ que s'estén de manera única a una família $\overline{X} \subseteq H \times D$ plana sobre D, la restricció de la qual a $H \times (D - \{x\})$ és X. La fibra de X sobre x és precisament $Y \cup L$, la qual cosa ens diu que $Y \cup L$ és planament allisable. Aleshores, donada $X = C \cup L \subset P^n$, si C pot ésser obtinguda projectant una corba $C' \subset P^{n+1}$ des d'un dels seus punts i de manera que la imatge del centre de projecció sigui el punt $x = C \cap L$, tindrem que $C \cup L$ és allisable. Ballico i Ellia demostren que això es verifica, en particular, si $O_C(1)$ és no especial.

També donen un exemple de corba no planament allisable del tipus $C \cup L$ on C no és una corba plana; en concret, C és una corba de grau 8 i gènere 9. El raonament emprat és el següent: si $C \cup L$ fos allisable, estaria en un tancat propi de l'adherència de $I_{9,9}$ (on $I_{d,g}$ denota l'obert de l'esquema de Hilbert de P^3 de corbes de grau d i gènere g format per les corbes irreductibles i no singulars). Com que l'elecció de L depèn de 3 paràmetres, s'haurà de verificar que

$$\dim I_{8,9} + 3 < \dim I_{9,9},$$

però $\dim I_{8,9} = 33$ i $\dim I_{9,9} = 36$.

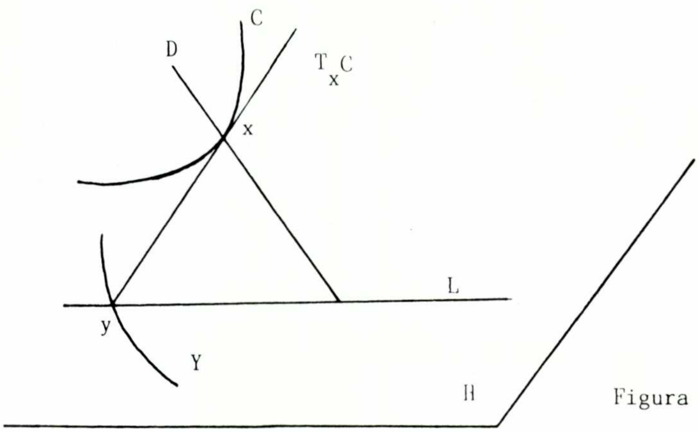

Figura 1.

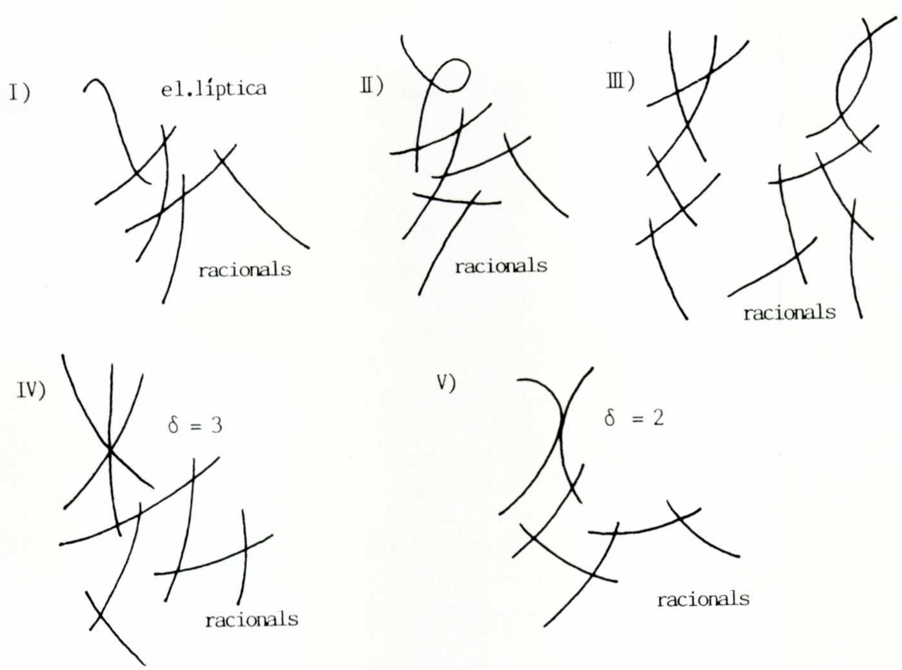

Figura 2.

Finalment, cal mencionar també el mètode dels feixos reflexius emprat per SAUER [Sa]. Aquest mètode consisteix a posar la corba X com a conjunt de zeros d'una secció global de $F(\mathrm{m})$, on F és un feix reflexiu de rang 2, i veure que $F(\mathrm{m})$ és generat per seccions globals. Donat que una secció global general de $F(\mathrm{m})$ s'anul·la sobre una corba irreductible i no singular, obtenim que X és allisable. En concret aplica aquesta tècnica al cas d'una corba X formada per dues corbes planes de graus c i d que es tallen en d punts i amb c = d + 1 ó d + 2. En la pràctica, però, aquest mètode és poc útil, perquè el veure que un feix és generat per seccions globals és en general un problema difícil de resoldre.

També usant propietats dels feixos reflexius, Hartshorne [H3] dóna el primer exemple conegut de corba irreductible de P^3 no allisable: construeix una família de corbes irreductibles de grau 14 i gènere aritmètic 23 amb una única singularitat que és un node i prova que el membre general no és allisable.

2. TEORIA DESENVOLUPADA PER HARTSHORNE I HIRSCHOWITZ

Nota: En tot això que segueix, usarem el mateix símbol per a denotar un fibrat vectorial i el feix localment lliure associat.

Definició 2.1. (vegeu [H-H] §2; aquí utilitzem $\check{N}$ en lloc de N)

Sigui C una corba projectiva llisa, N un fibrat vectorial de rang 2 sobre C, i $P(\check{N})$ la projectivització de $\check{N}$ amb $\pi : P(\check{N}) \to C$ la projecció sobre C. Sigui $K \subset P(\check{N})$ un conjunt finit tal que $\pi_{|K} : K \to C$ és injectiva, i sigui $O_{P(\check{N})}(-1)$ el feix associat al fibrat tautològic de $P(\check{N})$. Considerem la successió exacta associada a la restricció de $O_{P(\check{N})}(1)$ a K

$$O \to I_K(1) \to O_{P(\check{N})}(1) \to O_K(1) \to O$$

Prenent imatges directes, obtenim la successió exacta

$$O \to \pi_* I_K(1) \to N \to O_{\pi(K)} \to O.$$

Definim la transformació elemental negativa de N en K, que denotarem per $e^-(N, K)$, com $\pi_* I_K(1)$, i la transformació elemental positiva de N en K, denotada per $e^+(N, K)$, com $e^+(N, K) = e^-(N, K) \otimes O_C(\pi(K))$.

Definició 2.2.

Siguin C i D dues corbes llises que es tallen quasi-transversalment en un conjunt finit de punts S. Per cada punt $P \in S$ considerem un vector u tangent a D en P; u no és tangent a C, i per tant defineix un punt del fibrat normal N_C. El conjunt de formes lineals que s'anul·len en aquest punt té dimensió 1 i per tant és una recta de $\check{N}_C$, és a dir, un punt de $P(\check{N}_C)$. El conjunt d'aquests punts obtinguts variant $P \in S$, serà designat per Γ i ens referirem a aquest conjunt dient que és el subconjunt de $P(\check{N}_C)$ definit per D; anàlogament, al subconjunt de $P(\check{N}_D)$ definit per C, el designarem per Δ.

Un cop establertes aquestes definicions i notacions, podem enunciar els dos teoremes fonamentals d'aquesta teoria.

Teorema 2.3 ([H-H] 4.1)

Sigui X la unió nodal a P^3 de dues corbes no singulars C i D que es tallen quasi-transversalment en un conjunt finit de punts S. Siguin Γ i Δ com a la definició 2.2. Suposem.

a) $\forall\ \delta \in \Delta$, $H^1(D, e^+(N_D, \Delta - \{\delta\})) = 0$

b) $H^1(C, e^-(N_C, \Gamma)) = 0$

Aleshores, $H^1(N_X) = 0$ i X és fortament allisable.

(Una corba allisable X es diu fortament allisable si l'espai base i l'espai total de la família que allisa X poden ésser escollits també llisos).

Teorema 2.4 ([H-H] 5.2)

Siguin C, D, X i S com al teorema anterior. Suposem

a) C i D corresponen a punts llisos de l'esquema de Hilbert,

b) l'aplicació $H^o(N_C) \rightarrow H^o(N_{X|C})$ és bijectiva,

c) la successió $H^o(N_D) \rightarrow H^o(N_{X|S}) \rightarrow H^o(T^1_S)$ és exacta.

Aleshores, X no és allisable.

Exemple 2.5. ([H-H] 4.5.)

Sigui $X = C \cup D$ la unió de dues corbes no singulars C i D de P^3 amb $H^1(N_C) = H^1(N_D) = 0$ i que es tallen quasi-transversalment en $\leqq 4$ punts en posició general (és a dir, no tres alineats, no quatre coplanaris). Aleshores, $H^1(N_X) = 0$ i X és fortament allisable.

Per a l'aplicació d'aquests teoremes en la secció següent, és fonamental la següent

Proposició 2.6. ([H-H] 3.3)

Sigui X la unió nodal de dues corbes llises C i D amb intersecció S, i suposem que F és una superfície no singular que conté D i és transversal a C. Aleshores, per a tot subconjunt Δ' de Δ amb imatge $S' \subseteq S$, existeixen successions exactes

$$0 \to N_{D/F} \to e^{+} (N_D, \Delta') \to N_{F|D} (S') \to 0$$

$$0 \to N_{D/F} (-S') \to e^{-} (N_D, \Delta') \to N_{F|D} \to 0.$$

3. Aplicacions de la teoria de Hartshorne i Hirschowitz

3.1. *Allisament de corbes reduïdes de P^3 reunió nodal de dues corbes no singulars, l'una plana i l'altra sobre una quàdrica no degenerada.*

En aquest paràgraf hom aplica els teoremes d'allisament de Hartshorne i Hirschowitz (teoremes 2.3 i 2.4) al cas particular d'una corba reduïda de P^3 formada per la unió nodal d'una corba plana i una corba sobre una quàdrica no degenerada, ambdues no singulars. El resultat obtingut és parcial i queden encara per decidir alguns casos.

Teorema 3.1.1

Sigui H un pla de P^3, C una corba no singular de grau c continguda a H, i D una corba no singular de tipus (a, b) sobre una quàdrica no degenerada Q, $a \leqq b$. Sigui $S = C \cap D$, $\# S = s$, i suposem que $X = C \cup D$ és una corba nodal. Aleshores

i) Si $a \geqq 3$, $c > 3$ i $s \leqq 2c - 7$, X no és allisable.

ii) Si $a \geqq 4$ i $s \leqq a + b - 7$, X no és allisable.

iii) Si $c \leqq 3$, $a = 4$ i $s > b - 3$, X és fortament allisable.

iv) Si $a \leqq 3$ i $c \leqq 3$, X és fortament allisable.

v) Si $a \leqq 3$, $c = 4$ ó 5 i $s > \dfrac{(c-2)(c-3)}{2}$, X és fortament allisable.

Notem que $s \leqq \min \{a + b, 2c\}$ donat que, d'una banda, H talla D en $a + b$ punts i d'altra banda els punts de S són sobre la cònica $C' = Q \cap H$.

L'existència de corbes amb aquestes condicions és provada en la següent.

Remarca 3.1.2

Sigui Q una quàdrica no degenerada i C' una cònica no singular continguda a Q. Com que l'aplicació $H^o(\mathcal{O}_Q(a, b)) \rightarrow H^o(\mathcal{O}_{C'}(a+b))$ és epijectiva (cf dem 3.1.1 i)), a + b punts en posició general sobre C' poden ésser obtinguts tallant C' amb una corba no singular sobre Q de tipus (a, b). Anàlogament, com que $H^o(\mathcal{O}_H(c)) \rightarrow H^o(\mathcal{O}_{C'}(c))$ és epijectiva, donats 2c punts en posició general sobre C' hom pot obtenir-los tallant C' amb una corba no singular sobre H de grau c.

Combinant aquestes dues observacions, donats s punts sobre C' amb $s \leqq \text{mín}\{2c, a+b\}$, podem obtenir una corba no singular D continguda a Q i una corba no singular C dins H, la intersecció de les quals sigui els s punts donats.

En la demostració del teorema 3.1.1 juguen un paper fonamental els dos lemes següents:

Lema 3.1.3

Considerem totes les corbes planes de grau d i imposem que passin per s punts situats sobre una cònica no degenerada. Si $s \leqq 2d + 1$, aquests punts defineixen formes linealment independents de $H^o(\mathcal{O}_H(d))$.

Lema 3.1.4

Considerem totes les corbes de tipus (m, n) sobre una quàdrica no degenerada Q i imposem que passin per s punts situats sobre una cònica no singular. Si $s \leqq m + n + 1$, aquests punts defineixen formes linealment independents de $H^o(\mathcal{O}_Q(m, n))$.

Demostració del teorema 3.1.1

Incloem només les demostracions dels apartats i) i iii) per tal d'il·lustrar com s'apliquen els teoremes anteriors (teor. 2.3 i 2.4). Els casos restants es demostren anàlogament (vegeu [Sàn1]).

Demostració de i):

Veurem que hom hi pot aplicar el teorema 2.4. La verificació de la hipòtesi a) és com a [H-H] proposició 5.4 β). Per a provar b) és suficient de veure que $h^o(N_C) = h^o(N_{X|C})$, la qual cosa és certa si $h^o(\mathcal{O}_C(H+S)) = h^o(\mathcal{O}_C(H))$ (cf [H-H] 5.3 α)). Per Riemann-Roch, $h^o(\mathcal{O}_C(H+S)) = c + s + 1 - g + h^o(\mathcal{O}_C(c-4)H - S)$ (g = gènere de C) ja que $\omega_C \cong \mathcal{O}_C(c-3)$, i com que l'aplicació de restricció $H^o(\mathcal{O}_H(c-4)) \rightarrow H^o(\mathcal{O}_C(c-4))$ és un isomorfisme i $s \leqq 2c - 7$, pel lema 3.1.3 tenim que els punts de S defineixen formes linealment independents de $H^o(\mathcal{O}_H(c-4))$. Per tant, $h^o(\mathcal{O}_C(c-4)H - S) = h^o(\mathcal{O}_C(c-4)) - s$ i conseqüentment, $h^o(\mathcal{O}_C(H+S)) = h^o(\mathcal{O}_C(H))$.

Provem finalment que es verifica la hipòtesi c). És qüestió de veure que l'aplicació $H^o(N_D) \to H^o(O_S))$ és epijectiva, ja que $\mathrm{Nuc}(N_{X|S} \to T^1_S) \cong O_S$. Com que $H^o(N_D) \cong H^o(O_D(a, b)) \oplus H^o(O_D(2, 2))$, si demostrem que l'aplicació $H^o(O_D(a, b)) \to H^o(O_S)$ és epijectiva ja restarà provat. Per a això, és suficient de demostrar que l'aplicació $H^o(O_Q(a, b)) \to H^o(O_S)$ ho és. Però els punts de S són sobre la cònica $H \cap Q = C'$ i per tant, serà suficient de veure que les aplicacions $H^o(O_Q(a, b)) \to H^o(O_{C'}(a + b))$ i $H^o(O_{C'}(a + b)) \to H^o(O_S)$ són epijectives. Com que $C' \cong P^1$, $H^o(O_{C'}(a + b)) \cong H^o(O_{P^1}(2(a + b))$, que són formes homogènies de grau $2(a + b)$ a les quals podem imposar $2(a + b) + 1$ condicions. Així doncs, si $s \leqq (a + b) + 1$, $H^o(O_{C'}(a + b)) \to H^o(O_S)$ és epijectiva. Però $s \leqq a + b$, com hem notat anteriorment. Només queda per veure que $H^o(O_Q(a, b)) \to H^o(O_{C'}(a, b))$ és epijectiva. Com que C' és una cònica sobre Q, tenim la successió exacta

$$0 \to O_Q(-1, -1) \to O_Q \to O_{C'} \to 0.$$

Tensorialitzant per $O_Q(a, b)$ i prenent cohomologia, hom obté la successió exacta

$$H^o(O_Q(a, b)) \to H^o(O_{C'}(a, b)) \to H^1(O_Q(a-1, b-1))$$

Però per dualitat, $h^1(O_Q(a-1, b-1)) = h^1(O_Q(-1-a, -1-b))$ i aquest últim és zero per [H] Ch III ex. 5.6.

Demostració de iii):

Aplicarem el teorema 2.3. La successió exacta de 2.6 aplicada a D i a $\Delta' = \Delta - \{\delta\}$ ens dóna la successió exacta

$$O \to O_D(a, b) \to e^+(N_{D'} \Delta - \{\delta\}) \to O(2 + S - \{P\}) \to O$$

i en prendre cohomologia obtenim la successió exacta

$$H^1(O_D(a, b)) \to H^1(e^+(N_{D'} \Delta - \{\delta\})) \to H^1(O_D(2 + S - \{P\})).$$

Com que $H^1(O_D(a, b)) = 0$, a fi que $H^1(e^+(N_{D'} \Delta - \{\delta\})) = 0$ serà suficient que $H^1(O_D(2 + S - \{P\})) = 0$. Però com que $H^1(O_D(2)) \cong H^0(O_Q(a-4, b-4))$ (cf [H-H] 5.4 α)), perquè això es compleixi bastarà que el conjunt de punts S sobre D sigui en nombre $> h^o(O_Q(a-4, b-4)) = (a-3)(b-3)$ i que cada subconjunt de la forma $S - \{P\}$ imposi condicions independents sobre el sistema lineal $|O_Q(a-4, b-4|$. Per 3.1.4, si $(a-3)(b-3) < a + b - 6$, això últim es verificarà. Per tant, si $(a-3)(b-3) < \text{mín}\{s, a + b - 6\}$, aleshores $H^1(O_D(2 + S - \{P\})) = 0$. Però $(a-3)(b-3) < a + b - 6$ implica $a = 4$ i per tant la condició anterior és $a = 4$ i $s > b - 3$.

Finalment, la hipòtesi b) es verifica, ja que per c = 1, 2 i 3, $H^1(e^-(N_{C'}\Gamma)) = 0$ si $s \leqq 2$, 5 i 8 respectivament ([H-H] 4.2, 4.4 i 4.4.1), i en el nostre cas $s \leqq 2c$.

3.2. *Allisament de corbes amb gènere aritmètic 1.*

Com ja ha estat dit en la secció 2, TANNENBAUM a [T1] prova que tota corba reduïda i connexa de P^3 de gènere aritmètic 0 pot ésser allisada. En aquesta secció provarem, usant resultats de HARTSHORNE i HIRSCHOWITZ ([H-H]), que tota corba reduïda i connexa de P^3 de gènere aritmètic 1 és també allisable.

Teorema 3.2.1

Sigui X una corba reduïda i connexa de P^3 de gènere aritmètic 1. Aleshores X és allisable.

Demostració:

Siguin $X_1, \ldots, X_r$ les components irreductibles de X ordenades de manera que $X_j \cap (X_1 \cup \ldots \cup X_{j-1}) \neq \emptyset$ per a tot $j = 2, \ldots, r$ (això ho podem suposar perquè X és connexa). Donat que els punts d'intersecció de dues components són singulars, tenim que $\sum_{P\in X} \delta(P:X) \geqq r-1$, on $\delta(P:X)$ és l'ordre de la singularitat de X en el punt P (és a dir, $\delta(P:X) = \dim_k(\tilde{O}_{X,P}/O_{X,P})$ essent $\tilde{O}_{X,P}$ la clausura entera de l'anell local de X en P en el seu anell total de quocients). D'això i del fet que $\pi(X) \geqq 0$, i tenint en compte l'expressió del gènere aritmètic de X ([Hi] Th 2)

$$p_a(X) = \pi(X) + \sum_{P\in X} \delta(P:X) - (r-1)$$

es conclou que les úniques possibilitats són:

i) $\sum_{P\in X} \delta(P:X) = r-1 \quad$ i $\quad \pi(X) = 1$

ii) $\sum_{P\in X} \delta(P:X) = r \quad$ i $\quad \pi(X) = 0$.

En el cas i), cada component talla la reunió de les anteriors en un únic punt i no hi ha més de dues components que es tallin en un mateix punt. Els únics punts singulars són les interseccions de dues components, i l'ordre de la singularitat en cada un d'ells és 1 (és a dir, la intersecció és quasi-transversal). $\pi(X) = 1$ implica que una de les components ha de tenir gènere 1 i les altres són racionals.

En el cas ii), totes les components són racionals i es poden presentar els casos següents:

a) $X_j \cap (X_1 \cup \ldots \cup X_{j-1}) = \{P_j\}$ $j = 2, \ldots, r$, amb $P_i \neq P_j$ si $i \neq j$, la intersecció és quasi-transversal i una de les components té una singularitat d'ordre 1 (node).

b) $X_j \cap (X_1 \cup \ldots \cup X_{j-1}) = \{P_j\}$ $j = 2, \ldots, r$, $j \neq k$ i $X_k \cap (X_1 \cup \ldots \cup X_{k-1}) = \{P_k, Q_k\}$, $P_i \neq P_j$ si $i \neq j$, $P_i \neq Q_k$ per a tot i, i les interseccions són totes quasi-transversals.

c) $X_j \cap (X_1 \cup \ldots \cup X_{j-1}) = \{P_j\}$ $j = 2, \ldots, r$, amb $P_i \neq P_j$ si $i \neq j$ excepte per a $i = 2$, $j = 3$ (és a dir, hi ha tres components que es tallen en un mateix punt ($\delta = 3$)) i totes les interseccions són quasi-transversals.

d) $X_j \cap (X_1 \cup \ldots \cup X_{j-1}) = \{P_j\}$ $j = 2, \ldots, r$, amb $P_i \neq P_j$ si $i \neq j$ i totes les interseccions són quasi-transversals excepte una d'elles que és una tangència ($\delta = 2$).

Per tant, X serà d'un dels tipus representats en la figura 2. Per tal de provar que X és allisable, analitzarem cadascun dels casos possibles. Per abreujar, donarem només la demostració dels casos I) i V); els restants es demostren d'una manera semblant al cas I) (vegeu [Sàn2]).

Cas I). Sigui X_1 la component el·líptica. Donat que tot divisor de grau positiu sobre una corba el·líptica és no especial, tenim que $H^1(O_{X_1}(1)) = 0$ i per tant $H^1(N_{X_1}) = 0$. A més, si C és una corba racional de grau d, tenim que $H^1(O_C(1)) = H^1(O_{P^1}(d)) = 0$. Per tant, tota corba racional és no especial i conseqüentment $H^1(N_C) = 0$. Podem doncs aplicar 2.5 a les corbes X_1 i X_2 i obtenim que $X_1 \cup X_2$ és allisable. Prenent cohomologia en la successió exacta

$$0 \to O_{X_1 \cup X_2} \to O_{X_1} \oplus O_{X_2} \to O_{P_2} \to 0$$

tensorialitzada per $O(1)$, i usant que $H^1(O_{X_i}(1)) = 0$ per $i = 1,2$ i que l'aplicació $H^o(O_{X_1}(1)) \oplus H^o(O_{X_2}(1)) \to H^o(O_{P_2})$ és un epimorfisme (perquè $H^o(O_{X_2}(1)) \to H^o(O_{P_2})$ és un epimorfisme), concloem que $H^1(O_{X_1 \cup X_2}(1)) = 0$.

Sigui $\{X'_t\}$ una família que allisa $X' = X_1 \cup X_2$. Per semicontinuïtat, $H^1(O_{X'_t}(1)) = 0$. Podem afegir una corba racional Y_t que talli X'_t en un únic punt, i obtenim així una família $X'_t \cup Y_t \to X' \cup X_3$. X'_t és no singular i no especial i per tant, aplicant de nou 2.5, hom obté que $X'_t \cup Y_t$ és allisable, d'on concloem que $X' \cup X_3$ és també allisable. Raonant com abans, a partir ara de la successió exacta

$$0 \to O_{X' \cup X_3} \to O_{X'} \oplus O_{X_3} \to O_{P_3} \to 0,$$

hom obté que $X' \cup X_3$ és no especial.

Veiem doncs que, en afegir una component racional, la corba resultant és allisable i no especial, i per tant, podem repetir aquest procés fins a esgotar totes les components, obtenint finalment que X és allisable.

Cas V). Siguin X_1 i X_2 les components tangents. Vegem primer que $X_1 \cup X_2$ és allisable. De fet, construirem una deformació de $X_1 \cup X_2$ a una corba reductible amb dues components racionals que es tallen en dos punts. Siguin $\Psi_1: P^1 \to P^3$ i $\Psi_2: P^1 \to P^3$ parametritzacions de X_1 i X_2 respectivament, tals que $x_o = \Psi_1(0) = \Psi_2(0)$ és el punt de contacte. Per a cada t, llevat potser d'un nombre finit, podem definir $\sigma_t \in PGL(P^3)$ que depengui algèbricament de t, amb $\sigma_o = Id$ i tal que $\sigma_t(x_o) = x_o$ i $\sigma_t(\Psi_1(t)) = \Psi_2(t)$. Donat que la condició $\#(\sigma_t(X_1) \cap X_2) \geqq 3$ és tancada, existeix un obert U de P^1 amb $0 \in U$, tal que $\sigma_t(X_1) \cap X_2 = \{x_o, \Psi_2(t)\}$. Aleshores, $\sigma_t(X_1) \cup X_2$ serà una família plana (ja que el grau i gènere aritmètic són constants) amb fibra especial $X_1 \cup X_2$. Per 2.5, cada $\sigma_t(X_1) \cup X_2$ és allisable, d'on $X_1 \cup X_2$ és allisable. Com abans, veiem que $X_1 \cup X_2$ és no especial, i per tant, podem continuar com en els casos anteriors.

BIBLIOGRAFIA

[A] ARTIN, M.: "Lectures on deformations of singularities". Tata Institute of Fundamental Research. Bombay (1976).

[A-K] ALTMAN, A. - KLEIMAN, S.: "Introduction to Grothendieck Duality Theory". Lecture notes in Mathematics, 146. Springer-Verlag (1970).

[B-E] BALLICO, E. - ELLIA, Ph.: "On degeneration of projective curves". In: Algebraic Geometry - Open problems, Proceedings Ravello 1982, Lecture Notes in Math. 997 Springer-Verlag (1983), pp. 1-15.

[Ch] CHANG, M-C.: "Stable rank 2 Reflexive Sheaves on P^3 with small c_2 and applications". Trans. Amer. Math. Soc. 284 (1984), pp. 57-89.

[D-M] DELIGNE, P. - MUMFORD, D.: "The irreducibility of the space of curves of given genus". Publ. Math. IHES 36 (1969), pp. 75-110.

[E] EIN L.: "Hilbert scheme of smooth space curves". Preprint.

[G-H] GRIFFITHS, P. - HARRIS, J.: "Principles of Albegraic Geometry". Pure and Applied Math. A. Wiley – Interscience. Nova York (1978).

[G-P] GRUSON, L. - PESKINE, C.: "Genre des courbes de l'espace projectif (II)". Ann. Scient. Ec. Norm. Sup., (4), 15 (1982), pp. 401-418.

[H] HARTSHORNE, R.: "Algebraic Geometry". Graduate Texts in Math. 52, Springer-Verlag (1983).

[H1] HARTSHORNE, R.: "Stable Reflexive Sheaves". Math. Ann. 254, (1980), pp. 121-176.

[H2] HARTSHORNE, R.: "Stable Vector Bundles of rank 2 on P^3". Math. Ann. 238 (1978), pp. 229-280.

[H3] HARTSHORNE, R.: "Une courbe irréductible non lissifiable dans P^3". C. R. Acad. Sc. Paris, t. 299, Sèrie I, núm. 5, 1984.

[H4] HARTSHORNE, R.: "Genre des courbes algébriques dans l'espace projectif". Sem. Bourbaki, 34e année, 1981/82, nº 592.

[H5] HARTSHORNE, R.: "Equivalence Relations on Algebraic Cycles and Subvarieties of small codimension". Proc. of Sym. in Pure Math. 29 (1975), pp. 129-164.

[Ha] HARRIS, J.: "Curves in projective space". Sem. Math. Sup. (1982), Presses Univ. Montreal.

[Hi] HIRONAKA, H.: "On the arithmetic genera and the effective genera of algebraic curves". Mem. Coll. Scic. Univ. Kyoto 30 (1957), pp. 177-195.

[H-H] HARTSHORNE, R. - HIRSCHOWITZ, A.: "Smoothing Algebraic Space Curves". In: Algebraic Geometry, Proceedings Sitges 1983, Lecture Notes in Math. 1124 Springer-Verlag (1985), pp. 98-131.

[K] KLEIMAN, S.L.: "Geometry on Grassmannians and applications to splitting bundles and smoothing cycles". Publ. Math. IHES 36 (1969), pp. 281-298.

[M] MUMFORD, D.: "Lectures on curves on an algebraic surface". Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., (1966).

[M1] MUMFORD, D.: "Pathologies IV". Amer. J. Math. 97 (1975), pp. 847-849.

[OK] OKONEK, C.: "Vector Bundles on Complex Projective Spaces". Progress in Math., 3. Basel, Birkhäuser (1980).

[P-S] PESKINE, Ch. - SZPIRO, L.: "Liaison des variétés algébriques". Invent. Math. 26 (1974), pp. 271-302.

[R] ROTTMAN, J.J.: "An introduction to Homological Algebra". Pure and Applied Math. Academic Press (1979).

[S] SHAFAVERICH, I.R.: "Basic Algebraic Geometry". Springer-Verlag (1974).

[Sa] SAUER, T.: "Nonstable reflexive sheaves on P^3". Trans. Amer. Math. Soc. 281 (1984), pp. 633-655.

[Sàn1] SANCHEZ, C.A.: "Alisamiento de curvas nodales". X Jornadas Hispano-Lusas de Matemáticas. Múrcia (1985).

[Sàn2] SANCHEZ, C.A.: "Smoothing Curves in P^3 with $p_a = 1$". Apareixerà en els Proc. Amer. Math. Soc.

[Se] SERNESI, E.: "Schemi di Hilbert". Preprint.

[Sev] SEVERI, F.: "Vorlesunger über algebraische Geometrie". (E. Löffler Ubersetzung) Leipzig (1921).

[T1] TANNENBAUM, A.: "Degenerations of curves in P^3". Proc. Amer. Math. Soc. 68 (1978), pp. 6-10.

[T2] TANNENBAUM, A.: "Irreducible components of the Chow Scheme of Space Curves". Math. Z. 162 (1978), pp. 287-294.

[T3] TANNENBAUM, A.: "Deformations of Space Curves". Arch. Math. 34 (1980), pp. 37-42.